This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 67.12

HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787-1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

ÉTUDE

SUR LES

DIVERSES GRANDEURS

EN MATHÉMATIQUES

PAR

A. CALINON

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Prix : 2 fr.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET FILS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

BERGER-LEVRAULT ET Cie
5, RUE DES BEAUX-ARTS

1897

Math 67.12

HARVARD COLLEGE
JAN 6 1921
LIBRARY

Dagrand fund B

ÉTUDE

SUR

LES DIVERSES GRANDEURS

EN MATHÉMATIQUES

CHAPITRE PREMIER

Les Notions de nombre et de grandeur.

Il nous est assez facile de nous représenter dans quel ordre ces notions de nombre et de grandeur se sont formées peu à peu dans l'esprit de l'homme.

D'abord l'homme compara des groupes d'objets différents, par exemple, un groupe de cailloux et un groupe d'arbres; supposons ces groupes tels qu'il y ait un caillou correspondant à chaque arbre, ces groupes différents donnent alors l'idée d'une pluralité commune; ce sont ces diverses pluralités classées et nommées qui devinrent la suite des nombres entiers.

Puis l'homme voulut évaluer, en marchant, le chemin parcouru, il compta alors le nombre de pas faits par lui : c'est ainsi qu'il commença à mesurer les longueurs; son observation devenant plus précise, il s'aperçut ensuite qu'en général un nombre exact de pas n'épuisait pas complètement une longueur et qu'il restait un résidu inférieur à un pas. Pour mesurer ce résidu on le compara alors à une fraction du pas; le nombre fractionnaire est né de là.

L'étude de la géométrie fit faire un pas de plus dans cette voie: on remarqua que, lorsqu'on voulait mesurer, par exemple, la longueur de la diagonale d'un carré, le côté étant pris pour unité, aucun nombre fractionnaire, quelque petite que fût la subdivision de l'unité, n'arrivait à donner exactement cette mesure; pour répondre à ce cas, on créa le nombre irrationnel qui s'intercala dans la série des nombres fractionnaires. De même la comparaison de la longueur de la circonférence à son rayon conduisit au nombre transcendant. Ces diverses séries numériques complétées successivement, depuis la série des nombres fractionnaires, nous ont donné ce qu'on a appelé les divers ordres du continu mathématique; du reste tous les lecteurs que cette question intéresse ont lu sur ce sujet le très intéressant article de M. H. Poincaré: « Le continu mathématique [1] ».

Ainsi, en s'en tenant à l'ordre simplement historique, c'est d'abord l'idée du nombre entier qui fut dégagée et fixée; puis c'est la mesure des grandeurs qui conduisit aux nombres fractionnaires, irrationnels et transcendants et par eux au continu mathématique. Mais il n'en résulte nullement que cet ordre soit le meilleur lorsqu'on se place au point de vue rigoureux de la méthode déductive que s'imposent les mathématiciens. M. Poincaré, se plaçant à ce point de vue, dit que la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience et il oppose le continu mathématique, pure création de l'esprit, au continu physique qui relève de l'observation.

Cela est très juste, étant bien entendu, comme du reste M. Poincaré le remarque lui-même, que, cette notion du continu mathématique, c'est l'expérience qui nous a fourni l'occasion de la créer. Et, en effet, philosophiquement, le continu mathématique est absolument différent du continu physique; mais, matériellement, les différences entre les deux continus sont tellement petites qu'elles échappent à nos méthodes d'observation; c'est donc le continu physique, observé d'une façon forcément imprécise, qui nous a conduits au continu mathématique; plus tard, les deux continus se sont séparés dans notre esprit; mais, ce qui est fon-

1. *Revue de métaphysique et de morale* (janvier 1893).

damental, l'idée du continu mathématique n'a nullement été atteinte dans cette séparation : je veux dire par là que cette idée, éprouvée à cette pierre de touche du raisonnement mathématique, n'a donné lieu à aucune contradiction.

Prenons un exemple : voici un mètre métallique ; c'est là un continu physique et nous avons cette impression que ce mètre peut être subdivisé autant qu'on le voudra, chaque subdivision pouvant à son tour être subdivisée elle-même, et, cela indéfiniment ; or, c'est précisément cette observation inexacte, mais approchée du continu physique, qui nous donne le continu mathématique.

Mais la science plus avancée a dû reviser l'ordre de son développement historique et c'est ainsi que dans ces dernières années les mathématiciens ont essayé de dégager l'idée de nombre (entier, fractionnaire, etc.) de l'idée de grandeur ; cette recherche a abouti et l'on est arrivé ainsi à constituer la science complète du nombre ou analyse en prenant le nombre entier comme point de départ et en le généralisant par des définitions successives, sans faire aucun emprunt à la notion des grandeurs géométriques ou autres. Parmi les auteurs qui ont traité cette question je citerai en particulier, avec M. Poincaré, M. Kronecker, de Berlin ; dans cette méthode, les nombres fractionnaires, irrationnels et transcendants, et aussi les nombres algébriques et imaginaires se déduisent par de pures définitions des nombres entiers. On trouvera un exposé complet de ces diverses théories dans un ouvrage que je suis heureux de citer ici : *L'Infini mathématique*, de M. L. Couturat, parce que les lecteurs y verront condensés tous les renseignements relatifs à cette question, avec l'indication consciencieuse des sources et des auteurs.

Enfin M. J. Tannery dans son ouvrage : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* nous a montré tout ce qu'on pouvait mettre de rigueur dans cette étude de l'analyse pure et y a rattaché les diverses fonctions, trigonométriques, exponentielles, etc., qu'on a l'habitude de définir à l'aide de considérations géométriques.

On a donc ainsi une analyse rigoureusement déduite, formant, par elle-même et à elle seule, un tout logique, sans aucun emprunt fait à des notions autres que celle du nombre.

Malgré cela, plusieurs mathématiciens éprouvent pour cette conception une certaine répugnance, estimant que l'ordre historique, qui fait intervenir l'idée de grandeur dans la généralisation de l'idée de nombre, est seul rationnel.

Je vais indiquer rapidement les raisons pour lesquelles, après toute réflexion faite, je trouve préférable la constitution préalable, en mathématiques, d'une analyse pure.

D'abord on objecte aux partisans de cette idée qu'il est absolument artificiel de généraliser l'idée du nombre sans appuyer cette généralisation sur l'idée même de grandeur, laquelle, historiquement, a été l'origine et la raison d'être du nombre fractionnaire par exemple, puisque ce nombre fractionnaire a précisément été créé pour exprimer des états de la grandeur, états que ne pouvaient exprimer les nombres entiers. Or, j'avoue que pour mon compte le reproche d'être artificiel dans une théorie me touche très peu : en mathématiques les artifices sont d'un emploi courant et se justifient suffisamment par les résultats auxquels ils conduisent.

Et puis, enfin, cette science du nombre pur est-elle donc si artificielle qu'on veut bien le dire ? Examinons la question à propos de la définition du nombre fractionnaire ; on veut définir la fonction de deux variables $\frac{x}{y}$ où x et y sont des nombres entiers. Que fait-on ? On part du cas où $\frac{x}{y}$ exprime le quotient exact q de deux nombres, x étant divisible par y, et on se dit : comment peut-on définir cette fonction $\frac{x}{y}$ de façon à lui donner un sens généralisé quand x n'est pas divisible à y ? Qu'y a-t-il d'artificiel dans cette façon de poser la question ? Est-ce que, à chaque instant, en analyse, on n'est pas amené, une fonction étant définie pour certaines valeurs de la variable, à étendre la définition pour toutes les valeurs de cette variable ? Dès lors n'est-il pas tout simple de traiter de la même façon la fonction $\frac{x}{y} = q$ définie d'abord comme quotient exact du nombre entier x supposé divisible par le nombre entier y. Maintenant, comment se fait cette généralisation ? Comme

toutes les généralisations du même genre lorsqu'on veut étendre le sens d'une fonction.

Prenons d'abord $\frac{x}{y} = q$ et $\frac{x'}{y'} = q'$ dans le cas où x et x' sont respectivement divisibles par y et y' : la fonction est alors connue et définie ; elle exprime une division et elle jouit des propriétés suivantes qui toutes se démontrent :

L'égalité $q = q'$ équivaut à l'égalité $x\,y' = x'\,y$.

L'addition $q + q'$ équivaut à l'expression $\frac{x\,y' + y\,x'}{y\,y'}$.

La multiplication $q \times q'$ équivaut à l'expression $\frac{x \times x'}{y \times y'}$.

Ce sont là, je le répète, des formules démontrables.

Il s'agit de passer de là au cas où x n'est plus divisible par y ; je dirai alors, par définition, que les expressions ci-dessus $x\,y' = x'y$, $\frac{x\,y' + y\,x'}{y\,y'}$, $\frac{x \times x'}{y \times y'}$ signifient l'égalité, l'addition et la multiplication pour $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y}$, quotients non entiers.

Or l'analyse est pleine de généralisations de ce genre, jamais elles ne se font autrement.

De même pour le nombre algébrique ; là encore il s'agit de définir la fonction $x - y$, connue et étudiée quand x est plus grand que y, dans le cas où x devient plus petit que y. On suit absolument la même marche que précédemment pour la fonction $\frac{x}{y}$.

Voilà les raisons, selon moi très solides, pour lesquelles cette objection d'une théorie accusée d'être artificielle ne m'arrête pas du tout.

J'ajouterai que cette théorie a, à mon avis, le très grand avantage de conduire à une définition absolument rigoureuse du continu numérique, ce qui est très important.

Voyons enfin ce qu'opposent à cette théorie les géomètres qui prennent l'idée de grandeur pour en faire la base de la généralisation du nombre.

Cette théorie, M. Couturat nous l'a exposée dans l'ouvrage que j'ai déjà cité, *L'Infini mathématique*.

On y présente la notion de la grandeur indépendamment de la notion du nombre ; cela exige des développements très étendus et très complexes ; mais, ce que j'objecte surtout à cette méthode, c'est qu'elle ne nous conduit à l'idée complète de la grandeur que par une foule d'axiomes, depuis l'axiome de l'addition jusqu'aux axiomes de la divisibilité et de la continuité ; et, finalement, malgré tous ces axiomes, on reconnaît qu'il reste encore dans cette notion de la grandeur quelque chose d'indéfinissable.

Ainsi, en résumé, on peut, par une marche très simple et à l'aide de définitions successives, sans aucun axiome, tirer directement de la notion des nombres entiers toute la théorie des nombres fractionnaires, irrationnels et transcendants et aboutir à une définition rigoureuse du continu numérique.

Au contraire quand, pour arriver au même résultat, on veut passer par l'intermédiaire de la notion de grandeur, le problème se complique beaucoup et ne se résout qu'à l'aide de plusieurs axiomes importants, inutiles dans la théorie du nombre pur.

La première méthode, outre qu'elle est plus simple, est donc encore, en même temps, seule d'une rigueur parfaite ; mais elle appelle un complément. La seconde méthode nous donne en effet, à la fois, la théorie des grandeurs et des nombres : il s'agit donc maintenant de voir comment la première méthode permet de déduire de la théorie du nombre pur une théorie satisfaisante des grandeurs, cela, bien entendu, sans l'introduction d'aucun axiome. C'est cette théorie des grandeurs que je vais exposer ici en examinant successivement les diverses grandeurs de la géométrie et de la mécanique.

Je précise donc que, dans la suite de cette étude, je considère comme acquise toute la science du nombre pur avec la notion du continu numérique telle que l'ont définie M. Poincaré et M. J. Tannery ainsi que plusieurs géomètres de l'école de Berlin, comme M. Kronecker.

CHAPITRE II

Les Grandeurs géométriques.

---

§ 1er. — *Le continu géométrique.*

Il faut d'abord que je réponde à une objection qu'on ne manquerait pas de me faire. Si, avant toute géométrie, je considère comme établie la science du nombre, c'est évidemment pour m'appuyer sur cette science et pour introduire le nombre dans l'étude de la géométrie ; c'est en effet mon intention.

Mais c'est une opinion assez courante chez les mathématiciens que la géométrie doit être établie indépendamment de l'arithmétique : ce sont les géomètres modernes, dit-on, qui ont introduit le nombre en géométrie, mais Euclide s'était bien gardé de commettre cette erreur. Or, ce sont là des affirmations absolument inexactes. En ce qui me concerne, j'ai essayé de me passer du nombre en géométrie et je n'ai pu y arriver ; si d'autres croient la chose possible qu'ils nous la donnent, cette géométrie, pure de la notion du nombre. Mais Euclide? Euclide fait absolument comme les modernes, et s'appuie sur la notion du nombre dans une foule de démonstrations de sa géométrie. Exemple :

Soient quatre segments de droite a et a', b et b' proportionnels, ce qui, à l'aide des signes aujourd'hui employés, s'exprime par la formule $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$. Voici comment Euclide défininit cette proportionnalité : multiplions d'une part a et b par un même *nombre* entier quelconque m, puis d'autre part, a' et b' par un second nombre entier quelconque n ; on a évidemment entre $m\,a$ et $n\,a'$ l'une des trois relations suivantes :

$$m\,a = n\,a' \text{ ou } m\,a > n\,a' \text{ ou } m\,a < n\,a''$$

expressions où $m\,a$ et $n\,a'$ sont des segments de droite et où les

signes d'égalité et d'inégalité s'entendent au sens purement géométrique.

Il y a proportionnalité, dit Euclide, lorsque chacune des trois relations ci-dessus entraîne l'une des trois autres relations :

$$m\,b = n\,b' \text{ ou } m\,b > n\,b' \text{ ou } m\,b < n\,b'.$$

Cette définition est donc, en raison de l'introduction de nombres entiers quelconques m et n, d'origine essentiellement arithmétique.

On trouve également le nombre dans la démonstration du théorème : « Dans un cercle, les arcs sont proportionnels aux angles au centre. » Euclide considère en effet dans cette démonstration un angle au centre a contenu un certain *nombre* de fois dans un autre angle a' puis un arc α (correspondant à l'angle a) contenu le *même nombre* de fois dans un autre arc α' (correspondant à l'angle a').

C'est donc un point bien établi qu'Euclide, dans sa géométrie, suppose le nombre connu, et je le répète, en ce qui me concerne, je ne vois pas la possibilité de se passer du nombre en géométrie.

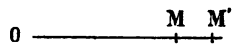
Je vais montrer maintenant combien il est facile, par de simples définitions et sans aucun axiome, de déduire de la série continue du nombre les propriétés fondamentales des grandeurs géométriques.

La définition d'une figure géométrique peut comporter une certaine indétermination en vertu de laquelle cette figure est susceptible d'une infinité d'états ; par exemple, un segment de droite porté sur une droite à partir d'une origine fixe et dont le point terminal est quelconque sur cette droite ; de même un angle ayant un côté fixe et un côté quelconque ; un cercle de rayon quelconque, etc.

Dans une quelconque de ces figures, chaque état se distingue de tous les autres par ce fait que deux états ou si l'on veut deux exemplaires d'un même état se reconnaissent à l'aide du principe de l'égalité géométrique que nous admettons ici et qui consiste, comme on le sait, dans la possibilité de superposer deux figures.

D'autre part, dans ces figures, les divers états peuvent se sérier d'une certaine façon : ainsi soit le segment variable OM, on

peut toujours classer les divers états de OM de telle façon que si le point M est compris entre les points O et M′ le segment OM précède le segment OM′.



De même pour la circonférence de rayon OM on peut classer ses divers états dans le même ordre que les états du segment OM.

Ceci dit, voici comment je définis le continu géométrique à l'aide du continu numérique.

Soient deux états E et E′ d'une figure à forme variable, comme celles dont je viens de parler ; les divers états de cette figure étant sériés, je prends un état quelconque *e* intermédiaire entre E et E′; je dis que la figure considérée est à variation continue entre les deux états E et E′ lorsqu'on établit, soit par définition, soit par démonstration, une correspondance univoque entre chaque état intermédiaire *e* et un terme de la série continue des nombres. Ainsi E et E′ correspondant respectivement aux nombres *p* et *q*, par exemple, *e* correspondra à un nombre compris entre *p* et *q*, et réciproquement un nombre quelconque compris entre *p* et *q* caractérisera un état compris entre E et E′. En un mot la correspondance est univoque.

C'est en cela que consiste le continu géométrique. Cette définition qui introduit le nombre en géométrie a une importance capitale sur laquelle je reviendrai [1].

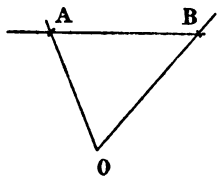
Mais je vais d'abord montrer qu'il suffit de mettre le continu géométrique dans la définition de la ligne droite seulement. Convenons, pour simplifier le langage, d'exprimer par l'expression ligne droite continue, que le segment OM est à variation continue. Dès lors je compléterai simplement la définition ordinaire de la ligne droite en disant : « La ligne droite est une ligne continue telle que deux points la déterminent. »

Cette définition suffit pour introduire le continu numérique dans toute la géométrie.

Prenons en effet un angle variable AOB découpant sur une droite fixe un segment variable AB : à chaque position du point B correspond un angle AOB ; il y a donc une correspondance uni-

1. On peut, bien entendu, envisager aussi, dans la figure géométrique, une série d'états imaginaires correspondant à la série des nombres imaginaires.

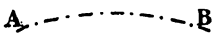
voque entre l'angle AOB et le segment AB; par conséquent, la correspondance univoque qui existe entre A B et le nombre variable n existe aussi entre ce nombre n et l'angle AOB; donc cet angle est aussi une figure à variation continue.



On démontre de même, en rattachant l'arc variable d'un cercle donné à l'angle au centre qui intercepte cet arc, que l'arc est, comme l'angle, une figure à variation continue.

En résumé le continu géométrique une fois défini dans la ligne droite se démontre pour toutes les autres figures.

Ici je ferai une remarque qui montrera bien qu'au fond la méthode que j'indique ne fait que revêtir de définitions précises des notions que les auteurs ont l'habitude d'introduire inconsciemment dans la géométrie. A chaque instant, en effet, les géomètres parlent du milieu d'une droite, de la bissectrice d'un angle; or, on ne pourrait pas être certain de l'existence de ce point milieu ni de cette bissectrice si la ligne droite, par exemple, n'était pas continue. Dans une ligne discontinue AB il n'y a pas nécessairement un point milieu.



Je dirai même plus: voici deux segments de droite dont les extrémités coïncident deux à deux; on admet alors que les deux segments coïncident point par point dans toute leur étendue, mais cela peut n'avoir pas lieu si la ligne droite n'est pas continue, car il peut arriver que les pleins et les vides des deux segments ne se correspondent pas: dès lors si l'on n'est pas assuré que deux segments qui ont mêmes extrémités coïncident entièrement point par point, on se trouve arrêté dès la première démonstration de la géométrie.

Donc, puisqu'on est de toute façon obligé d'introduire dans la droite la notion du continu géométrique, n'est-il pas plus rationnel, plus rigoureux de le faire dès le début et explicitement, en donnant tout de suite une définition complète de cette ligne, c'est-à-dire une définition qui comprenne et énonce cette propriété du continu ?

Maintenant, je reviens sur ce point que, pour définir le continu géométrique dans la ligne droite, ce qui suffit pour toute la géo-

métrie, je m'appuie sur le continu numérique. Cela est capital au point de vue où je me suis placé ; la géométrie tout entière est, en effet, subordonnée ainsi à la notion du nombre et du continu numérique. Il est bien évident que les formes pures de la géométrie ne sont plus les formes des corps qu'étudie la physique. Aujourd'hui la science admet volontiers que les corps sont composés de molécules séparées les unes des autres et d'ailleurs en vibration : évidemment la forme purement géométrique est autre chose que cela et cette différence, M. Poincaré nous l'a nettement signalée en opposant le continu mathématique au continu physique. Mais le continu géométrique n'est qu'une simple transposition du continu numérique dans la notion de la forme ; donc, en résumé, c'est le continu numérique, c'est le nombre qui caractérise la forme géométrique et la distingue de la forme physique. La géométrie, c'est la science de la forme arithmétisée, si l'on veut me passer cette expression ; et c'est parce que la géométrie est une application de l'analyse, qu'elle comporte l'emploi du raisonnement mathématique et que toutes les propriétés des figures peuvent se traduire en formules et donner lieu à ce qu'on a appelé la géométrie analytique : j'ajoute que suivant les questions géométriques qu'on étudie on peut se borner à introduire en géométrie le nombre arithmétique, ou, au contraire, avoir avantage à introduire dans la forme le nombre algébrique ou le nombre imaginaire.

Une petite modification dans le langage usuel fera du reste mieux ressortir le lien qui rattache la forme continue au nombre. Prenons la série continue du nombre et appelons chacun de ses termes un état du nombre continu. On voit ainsi que les états successifs de ce que j'ai appelé une forme à variation continue correspondent un à un aux états successifs du nombre et comme finalement les signes concrets par lesquels on convient de figurer les nombres (chiffres arabes, chiffres romains, numération parlée, etc...) sont absolument arbitraires, il est bien évident que les états successifs de cette forme à variation continue sont une écriture particulière du nombre continu.

Ainsi le segment de droite variable, sous ses diverses formes, n'est qu'une façon spéciale d'écrire la série du nombre continu.

§ 2. — *Définition des grandeurs géométriques.*

Soit, dans une figure à variation continue, e un état quelconque auquel correspond le nombre x, ce que je traduirai par l'expression e_x. Prenons une équation $x = f(y)$ exprimant une relation univoque entre x et y; il est évident que la correspondance univoque qui existe entre e et x en entraîne une seconde du même genre entre e et y. Donc quand il existe une correspondance univoque entre une forme et un nombre, il en existe une infinité. Il y a donc là une indétermination qui permet d'imposer à cette correspondance des conditions supplémentaires.

Ceci dit, je considère le segment de droite; on peut réunir deux segments bout à bout sur une même droite et former ainsi par leur ensemble un troisième segment.

De même pour deux arcs de cercle de même rayon.

De même aussi deux angles ayant leur sommet commun et juxtaposés par un côté forment un troisième angle.

Si donc on considère l'une de ces trois figures, lesquelles sont à variation continue, elle jouit de la propriété suivante :

Deux états quelconques de cette figure peuvent toujours être groupés d'une façon déterminée et donner ainsi par leur ensemble un troisième état de la même figure.

C'est en cela que consiste la propriété fondamentale du groupement, laquelle caractérise seulement un certain nombre de figures géométriques.

Je vais maintenant étudier spécialement les figures géométriques à variation continue qui jouissent de cette propriété du groupement.

Soit e_r l'état qu'on obtient par le groupement des deux états e_p et e_q, p, q et r étant, bien entendu, les nombres qui correspondent à ces trois états. Ainsi que je l'ai dit, cette correspondance entre les nombres et les états est indéterminée, de sorte qu'on peut imposer aux nombres de remplir certaines conditions. Dans le cas actuel j'imposerai aux nombres p, q et r la relation $r = p + q$ qui exprime que, dans le groupement considéré, le nombre de l'état fourni par le groupement est la somme des nombres des

deux premiers états. Mais cette relation ne fait pas encore disparaître complètement l'indétermination, et en effet si la relation $r = p + q$ est satisfaite pour une correspondance, elle l'est aussi pour toutes les autres correspondances qu'on obtient en modifiant proportionnellement à eux-mêmes tous les nombres. Mais l'indétermination cesse lorsque, en même temps qu'on s'impose cette relation, on se donne un état déterminé et le nombre correspondant. Selon l'usage je me donne l'état qui correspond au nombre 1, soit e_1, que j'appellerai l'état unitaire. Dès lors, chaque état a un nombre bien déterminé et un seul, et inversement. Dans ce système, le nombre d'un état quelconque est ce qu'on appelle sa mesure par rapport à l'état unitaire.

Soit une série d'états e_α e e_γ e_δ, et l'état unitaire e_1. Remplaçons la correspondance numérique α, β, γ, δ et 1 par une autre correspondance où e_α deviendra l'état unitaire : les deux séries numériques se correspondront donc comme suit :

$$\begin{array}{lccccc} & \alpha & \beta & \gamma & \delta & 1 \\ \text{et} & 1 & \beta' & \gamma' & \delta' & \omega. \end{array}$$

J'ai montré que pour répondre à la relation $r = p + q$ ces deux correspondances devaient avoir leurs termes respectivement proportionnels : on aura donc $\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \ldots = \frac{1}{\omega}$ et par suite $\beta' = \frac{\beta}{\alpha}$, $\gamma' = \frac{\gamma}{\alpha}$, etc... ce qui exprime cette propriété fondamentale que lorsqu'on prend l'état e_α pour nouvel état unitaire, la mesure de l'état e_β devient, avec l'état unitaire e_α, $\beta' = \frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire la mesure primitive β divisée par le nombre fixe α.

C'est la règle relative au changement de l'état unitaire.

Je rappelle à nouveau que la formule de l'addition $r = p + q$ est absolument indépendante du choix de l'état unitaire.

Ceci dit, je prendrai, et c'est là une définition, les signes de l'addition numérique pour exprimer le groupement des états et j'écrirai $e_r = e_p + e_q$ équivalent à $r = p + q$. Le mot addition, pour les états, remplacera donc simplement le mot groupement. J'écrirai de même $e_p = e_r - e_q$ pour $p = r - q$. Je dirai, toujours

par définition, que le produit d'un état par le nombre n est le produit par n de la mesure de cet état, $n\,e_p = e_{np}$: toutes les opérations dont je viens de parler jusqu'ici donnent comme résultat un nouvel état ; au contraire, quand je définis le rapport des deux états $\frac{e_p}{e_q}$ le rapport numérique $\frac{p}{q}$, le résultat de l'opération est un nombre.

Ajoutons plusieurs états $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma + \ldots = e_s$, s étant la somme $\alpha + \beta + \ldots$; soit n le nombre des états ajoutés ; si tous ces états sont égaux, on a $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ et $s = n\,\alpha$, d'où $n\,e_\alpha = e_s = e_{n\alpha}$; c'est la formule précédente où n est un nombre entier ; $e_{n\alpha}$ est ainsi la somme de n états égaux à e_α.

Je n'insiste pas davantage sur ces diverses formules dont les conséquences sont pour ainsi dire évidentes ; c'est ainsi qu'on a, par exemple, $e_\alpha + e_\beta = e_\beta + e_\alpha$ parce qu'on a $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Mais, pour éviter tout malentendu, je tiens à bien préciser le sens de la formule $e_\alpha = e_\alpha$ correspondant à $\alpha = \alpha$: il faut bien remarquer que cette formule ne définit nullement l'égalité géométrique de deux états, car cette égalité est admise antérieurement à toute cette théorie, sert de base à la définition du continu géométrique et nous permet seule de différencier par des nombres différents des états différents de la figure variable. La formule $e_\alpha = e_\alpha$ emprunte donc simplement le signe $=$ à l'arithmétique pour exprimer (et non définir) l'égalité géométrique de deux états d'une même figure.

On a évidemment reconnu, dans ce qui précède, les propriétés d'un certain nombre de grandeurs géométriques, et ce que j'ai appelé les divers états d'une figure à variation continue jouissant de la propriété du groupement ne diffère pas de ce qu'on appelle habituellement des grandeurs de même espèce.

Mais en géométrie le mot grandeur a un sens plus général ; il peut y avoir en effet des grandeurs dans des figures variables qui ne possèdent pas la propriété du groupement : je me bornerai à citer la grandeur désignée sous le nom de longueur d'un arc de courbe. Si l'on prend sur une ellipse, par exemple, deux arcs, en général on ne peut les réunir, sans les déformer, de façon à obtenir un troisième arc de cette même ellipse. Mais on sait qu'on

peut toujours comparer un arc d'ellipse à un segment de droite ; on dit alors, et c'est là une définition, que la longueur du segment de droite est la longueur de l'arc. Je n'ai du reste rien à dire de nouveau sur cette question connue.

§ 3. — *Les aires et les volumes.*

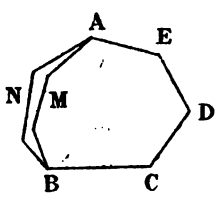
Les aires et les volumes sont des grandeurs qui demandent une mention spéciale en raison des particularités qu'elles présentent. Prenons d'abord les aires. Nous avons tous le sentiment de ce qu'est une aire comprise dans un contour fermé : mais ici, pour être rigoureux, je dois donner une définition exacte; voici les deux propriétés caractéristiques que je prendrai comme définition.

1° Quand deux contours fermés sont égaux, c'est-à-dire superposables, ils enferment des aires égales.

2° Quand deux contours complètement extérieurs l'un à l'autre sont groupés ou juxtaposés de façon à avoir une partie de contour commune, le nouveau contour fermé qu'on obtient en supprimant cette partie commune enferme une aire égale à la somme des aires des deux premiers contours.

Cette seconde propriété, qui est la propriété caractéristique du groupement, range l'aire parmi les grandeurs étudiées précédemment. Cependant je note cette différence que le mode de groupement de deux contours est possible d'une infinité de façons, tandis que, pour les segments de droite, les angles, etc., il n'y a qu'un mode de groupement. De cette indétermination dans le groupement des aires résulte la proposition suivante :

Deux contours fermés qui sont des groupements différents de contours égaux ont même aire, cette aire étant la somme de celles des contours partiels deux à deux égaux dans les deux contours totaux. Ces contours totaux forment ce qu'on appelle des figures équivalentes.



Considérons un contour AMBN qui, à la limite, se réduit à la ligne AMB; adjoignons à ce contour un contour ABCDE d'aire S, si s est l'aire du con-

tour AMBN et S′ l'aire du contour total ANBCDE, on a $S' = S + s$. Mais à la limite, quand le contour AMBN se réduit à la ligne AMB, les deux contours ANBDA et AMBDA deviennent deux figures égales et par conséquent de même aire : on a donc, dans ce cas, $S' = S$ ce qui exige $s = 0$. Ainsi une aire s'annule quand son contour se réduit à une ligne et à plus forte raison à un point.

Ces principes posés, la théorie des aires s'établit à la façon ordinaire. Ainsi deux rectangles ayant un côté commun a et deux bases différentes $b = p\beta$ et $b' = p'\beta$ sont le premier un groupement de p rectangles de côtés a et β et le second de p' de ces mêmes rectangles. Si A, A′ et α sont les aires des deux premiers rectangles et du rectangle partiel de côtés a et β, on a $A = p\alpha$ et $A' = p'\alpha$; d'où $\frac{A}{A'} = \frac{p}{p'} = \frac{b}{b'}$. Ces aires des deux rectangles sont donc dans le rapport des deux côtés b et b'.

De là on déduit que les aires de deux rectangles quelconques sont dans le rapport des produits de leurs côtés.

On passe du rectangle au parallélogramme et du parallélogramme au triangle. Je n'insiste pas sur ces démonstrations connues.

La théorie des volumes repose sur des définitions tout à fait analogues.

1° Deux polyèdres égaux, c'est-à-dire superposables, ont même volume.

2° Un groupement de deux polyèdres juxtaposés, complètement extérieurs l'un à l'autre, a pour volume la somme des volumes de ces deux polyèdres.

Ces deux propriétés réunies contiennent la définition complète des volumes.

On en déduit immédiatement la conséquence suivante :

Si deux polyèdres sont des groupements différents de polyèdres partiels deux à deux égaux, ils ont même volume.

Après quoi la théorie des volumes s'établit à la façon ordinaire.

Maintenant que nous avons passé en revue les diverses grandeurs de la géométrie, faut-il essayer d'en déduire une définition générale de ces grandeurs? Je ne le crois pas et je préfère con-

clure en montrant qu'au contraire il y a dans ces diverses grandeurs trois types bien distincts qui ne peuvent se ramener à une définition unique.

Ces trois types de grandeur ont en commun la propriété fondamentale du continu géométrique.

Le premier type, segment de droite, angle, arc de cercle et arc d'hélice, jouit seul de cette propriété que deux grandeurs de même espèce donnent, par un groupement qui est unique, une troisième grandeur de même espèce, dite somme des deux premières.

Le second type, aires et volumes, jouit également de la propriété du groupement, avec cette différence importante que le groupement de deux aires ou de deux volumes peut se faire d'une infinité de façons, la somme restant la même.

Enfin dans le troisième type, arc de courbe, la propriété du groupement n'a plus de sens.

Voilà donc toutes les grandeurs géométriques classées en trois types parfaitement définis.

CHAPITRE III

Les Grandeurs en Mécanique.

---

§ 1er. — *Origine de la notion de durée.*

Je vais reprendre ici, sous une forme un peu différente, des idées que j'ai développées plus longuement dans un de mes ouvrages antérieurs : *Étude critique sur la mécanique,* dont l'édition est d'ailleurs actuellement épuisée.

Avant de définir la grandeur qu'on appelle la durée, je voudrais d'abord me débarrasser de toutes les erreurs qui obscurcissent cette notion.

Pour quelques géomètres la durée mesurable est une simple intuition, laquelle nous révèle d'emblée ce que sont deux temps égaux. Mais comme tout le monde n'a pas cette intuition, il faut évidemment chercher autre chose. C'est en se plaçant à ce point de vue qu'on a été amené à définir deux durées égales ; voici cette définition : lorsque deux phénomènes de mouvement se produisent à des époques différentes, mais dans des conditions rigoureusement identiques, on dit qu'ils sont de même durée.

Or c'est là une véritable pétition de principe ; dans ces deux mouvements, en effet, il y a forcément des vitesses lesquelles font partie des conditions dont on parle et qui doivent être identiques ; or, ces deux vitesses étant des fonctions de la durée, comment peut-on les juger identiques avant de savoir mesurer la durée ? Voilà le cercle vicieux.

Citons un exemple : soit un récipient qu'on remplit d'eau et qu'on laisse ensuite se vider de lui-même par un orifice pratiqué à sa base ; on reproduit plusieurs fois cette expérience ; a-t-elle toujours la même durée ? Or, une des circonstances de ce mouvement est la vitesse de la rotation de la terre ; si cette vitesse de rotation varie, elle constitue, dans la reproduction de ce phéno-

mène, une circonstance qui ne reste plus identique à elle-même. Mais supposer cette vitesse de rotation constante, c'est supposer qu'on sait mesurer le temps.

Cette définition de la mesure du temps est donc sans valeur. J'indiquerai plus loin comment on peut arriver à cette définition d'une façon rigoureuse. Mais voyons d'abord comment l'homme est arrivé pratiquement, en dehors de toute intuition et de toute notion mécanique, à faire choix d'une horloge.

D'abord l'homme s'est préoccupé de couper le temps en tranches, je ne dis pas en tranches égales, mais simplement en tranches; or les faits les plus commodes pour sectionner ainsi la durée sont évidemment les mouvements périodiques, chaque période s'offrant naturellement à l'esprit comme une partie du temps. Mais, toujours au point de vue pratique de son existence, les deux périodes les plus importantes dans l'univers pour l'homme sont le jour et l'année; dans tout cela il n'y a pas, remarquons-le bien, l'ombre d'un raisonnement quelconque; l'homme qui mange le jour et qui dort la nuit, inconsciemment, est amené à attacher à cette période du jour complet une importance considérable. Plus tard, il observera les saisons qui alternent et en raison de leur rôle dans les travaux de la culture, il notera cette période d'une année au bout de laquelle les saisons se reproduisent. Voilà donc le temps évalué en années et l'année en jours, avec cette particularité, expliquée d'ailleurs par la science, que toutes les années comprennent le même nombre de jours. Enfin, le jour correspondant à une révolution apparente de la sphère céleste ou, ce qui revient à peu près au même, à une révolution du soleil autour de la terre, l'idée la plus simple pour diviser le jour était de le diviser proportionnellement à cette révolution. Telle est l'horloge qui fut adoptée par l'homme; et, je le répète, dans ce choix, ce sont des considérations terre à terre, des préoccupations d'existence matérielle qui ont guidé l'homme: dans tout cela, aucune idée scientifique ou métaphysique, mais un simple point de vue utilitaire qui imposait en quelque sorte le choix auquel on fut amené.

Ce point établi, il est bien évident que la question de la durée mesurable reste, au point de vue scientifique, entièrement à ré-

soudre : je vais donc l'aborder en considérant comme nulle et non avenue la solution d'ordre simplement pratique dont je viens d'indiquer l'origine.

§ 2. — *Définition de la durée.*

Le temps nous apparaît d'abord comme un ordre d'après lequel se classent les faits ou les phénomènes : ainsi deux faits sont simultanés ou bien l'un est antérieur à l'autre. Lorsqu'il s'agit du mouvement des corps dans l'univers, ces corps ont, à un moment donné, des positions simultanées ; à un autre moment ils auront encore des positions simultanées entre elles mais postérieures aux premières.

Considérons deux états successifs du temps e et e', c'est-à-dire deux moments correspondant à deux simultanéités successives, j'admettrai d'abord qu'il y a une correspondance univoque entre chacun de ces états et chacun des termes de la série du nombre continu ; j'indique par les expressions e_x et $e_{x'}$ que x et x' sont les deux nombres qui correspondent aux deux états e_x et $e_{x'}$, étant bien entendu que si l'état $e_{x'}$ est postérieur à l'état e_x on a $x' > x$.

Par cette définition j'introduis le continu numérique dans la notion du temps et je crée ainsi le continu mécanique comme j'ai créé le continu géométrique.

Prenons maintenant un corps quelconque en mouvement, la terre par exemple : ce corps se déplace autour du soleil et tourne en même temps sur lui-même ; réduisons-le par la pensée à un point ; ce point en tournant autour du soleil a une position correspondant à chaque état e_x du temps, et par suite à chaque valeur de x ; il y a donc une correspondance univoque entre cette position variable du point et le nombre x ; il en résulte que l'ensemble de ces positions jouit de la propriété du continu ; on en conclut que le lieu de ces positions est une courbe géométrique ; c'est ce qu'on appelle la trajectoire.

De même et pour la même raison l'angle dont la terre tourne autour de son arc est bien l'angle défini en géométrie et jouit de la propriété du continu.

En résumé, la durée étant envisagée comme un objet continu, tous les objets variables avec elle jouissent également de la propriété du continu. C'est grâce à cette introduction du continu numérique, que la mécanique devient une application des mathématiques pures, c'est-à-dire de l'analyse.

Pour la même raison, les formes qu'on rencontre en mécanique, trajectoires, angles de rotation, jouissant aussi de la propriété du continu, relèvent de la géométrie.

Revenons maintenant à l'expression d'un état du temps e_x; la correspondance univoque que j'ai supposée entre cet état et le nombre x en entraîne une infinité d'autres; il suffit, en effet, de remplacer, dans e_x, x par y, en supposant entre x et y une relation univoque $x = f(y)$, pour avoir une autre correspondance e_y, e_y désignant le même état du temps que e_x. Cette correspondance univoque est donc au fond indéterminée. Toutefois je considérerai comme n'étant pas différentes deux correspondances univoques exprimées par e_x et e_y où le rapport $\frac{y}{x}$ reste constant.

J'appellerai d'une façon générale, horloge, un instrument dont l'aiguille tournera sur un cadran d'un angle proportionnel au nombre x de la correspondance e_x; la correspondance e_y me fournira donc une seconde horloge et, d'après ce qui précède, deux horloges donnant simultanément des angles proportionnels, ce qui correspond au cas de $\frac{x}{y}$ constant, ne seront pas considérées comme distinctes.

Ainsi que je l'ai montré plus haut, nos aïeux, en dehors de toute idée scientifique, ont cherché simplement l'horloge la plus commode eu égard à leurs conditions d'existence.

Ici, me plaçant au seul point de vue scientifique, je vais chercher l'horloge la plus commode pour écrire le plus simplement possible les formules qui exprimeront les lois du mouvement des corps dans l'univers.

Il est donc bien entendu que, dans cette méthode, toutes les horloges sont également légitimes; mais il peut y en avoir une plus simple et plus commode que les autres; c'est celle-là que je choisirai pour mesurer la durée.

Cherchons donc si cette horloge plus commode existe et quelle elle est.

Il suffit, à cet effet, d'enregistrer les mouvements des corps dans l'univers et de les traduire en formules aussi simples que possible.

Je remarque d'abord que toutes les planètes et leurs satellites sont animées d'un mouvement de rotation sur eux-mêmes : or les angles simultanément décrits dans toutes ces rotations sont toujours proportionnels : voilà une loi très importante. Soit α l'angle variable d'une de ces rotations ; soit d'autre part θ l'angle décrit simultanément par l'aiguille d'une horloge : si cette horloge est choisie de telle façon que l'on ait $\frac{\alpha}{\theta} =$ constant, on aura aussi, β, γ, δ, etc... étant les angles de rotation de tous les autres corps, planètes ou satellites, $\frac{\beta}{\theta} =$ constant $\frac{\gamma}{\theta} =$ constant, etc.

Il en résulte que cette horloge particulière que je désignerai, dans la suite, par la lettre H me permet d'exprimer par une simple formule du premier degré, $\alpha = k\,\theta$, la loi fondamentale dont je viens de parler : dans cette formule, k est, bien entendu, un coefficient ayant une valeur particulière pour chaque corps.

Voici maintenant une seconde loi aussi importante.

Traçons le rayon vecteur qui joint une planète au soleil, ou un satellite à sa planète : ce rayon vecteur décrit une aire ; or, l'observation nous montre que toutes ces aires simultanément décrites sont proportionnelles entre elles, et de plus proportionnelles aux angles de rotation dont il vient d'être question : donc, avec la même horloge H, cette loi des aires s'exprime par la formule du premier degré $\sigma = \lambda\theta$, σ étant l'une de ces aires et λ un coefficient ayant une valeur particulière pour chaque planète ou chaque satellite.

Voilà donc deux lois fondamentales qui, avec cette horloge H, s'expriment par des formules très simples.

Poursuivons cet examen : dans cette méthode, la vitesse et l'accélération se définissent à la façon habituelle ; mais pour chaque position d'un point mobile la vitesse et l'accélération dépendent de l'horloge choisie. La vitesse, toujours dirigée suivant la tan-

gente à la trajectoire, garde sa direction mais change de grandeur quand on change d'horloge.

Au contraire, on voit aisément, en traçant la figure d'après laquelle on définit l'accélération par la considération de deux vitesses infiniment voisines, que le changement de l'horloge modifie à la fois la grandeur et la direction de l'accélération.

Je rappelle encore ici que deux horloges à marche proportionnelle ne doivent pas être considérées comme distinctes.

Ainsi le choix de l'horloge influe sur la direction de l'accélération.

Ceci dit, je prends le mouvement d'une planète autour du soleil et je note l'accélération de ce mouvement prise avec l'horloge H, précédemment définie ; or cette accélération de la planète est toujours dirigée vers le soleil ; je viens de montrer qu'une autre horloge modifierait cette direction. Donc c'est seulement cette horloge H qui donne pour les planètes des accélérations dirigées vers le soleil.

Voilà donc une loi fondamentale qui s'énonce très simplement avec cette horloge H[1].

Enfin je citerai encore la loi suivante dont celle qui précède n'est qu'un cas particulier.

Lorsque deux corps sont en présence, il y a mouvement et les accélérations de ces deux corps sont toujours dirigées suivant la droite qui les joint, les accélérations étant prises avec l'horloge H.

Il est clair qu'avec une autre horloge cette loi sur la direction des accélérations cesse d'être vraie ou, pour mieux dire, s'exprime autrement.

Ce qui précède suffit pour montrer l'intérêt particulier que présente cette horloge H ; il n'en résulte pas que le choix de cette horloge s'impose, mais ce choix comporte de grands avantages pour exprimer d'une façon simple les lois dont je viens de parler.

Ainsi que je l'ai dit, cette horloge est telle que sa marche est proportionnelle à l'angle de rotation de l'une quelconque des planètes ; on peut donc, en particulier, prendre l'horloge H qui

1. Cette loi est d'ailleurs une conséquence de la loi précédente sur les aires. On démontre, en effet, que si l'aire par rapport à un point O est proportionnelle au temps, l'accélération évaluée sur la même horloge passe toujours par ce point fixe O.

marque avec son aiguille l'angle de la rotation terrestre. C'est cette horloge qui nous servira, par définition, à mesurer la durée, cela, je le répète, uniquement parce que l'horloge en question est commode.

Maintenant, comment se fait-il qu'on soit ainsi ramené précisément à l'horloge adoptée par nos aïeux pour des raisons si différentes de celles que je viens d'exposer? Cette explication est fournie par un théorème qu'on démontre en mécanique. Supposons qu'il existe dans l'univers une horloge telle que, pour deux corps en présence, elle donne toujours deux accélérations, dirigées suivant la droite qui les joint, et de rapport constant; on démontre alors, comme conséquence de cette loi, qu'un corps, comme la terre ou une planète, tourne sur lui-même d'un angle proportionnel à la marche de cette horloge [1].

C'est grâce à ce théorème que l'angle de la rotation terrestre nous a précisément donné cette horloge.

En résumé, le temps se trouve ainsi défini comme grandeur, mais non de la même façon que les grandeurs géométriques. En réalité, la durée mesurable est une variable, choisie parmi toutes les variables qui se présentent dans l'étude des mouvements parce qu'elle se prête plus particulièrement à l'expression simple des lois du mouvement.

§ 3. — *Définition de la masse et de la force.*

Ce qui précède me conduit directement à la définition de la masse; je reprends une loi déjà énoncée :

Quand deux points de matière sont en présence ils se mettent en mouvement et leurs accélérations, évaluées à l'horloge H, sont dirigées en sens inverse suivant la droite qui les joint.

1. Je rappelle l'énoncé de ce théorème :

Lorsqu'un corps est soumis à un système de forces admettant une résultante unique et que cette résultante passe constamment par le centre de gravité G de ce corps, celui-ci tourne à chaque instant autour d'un axe de rotation passant par G et l'axe et la vitesse de cette rotation varient pour chaque position du corps. Toutefois, lorsque cet axe est, à l'origine, un des axes de l'ellipsoïde d'inertie du corps, la rotation continue à s'effectuer autour de cet axe qui reste ainsi de direction fixe; de plus, la vitesse de la rotation est constante.

Cette loi se complète comme suit :

Chaque point de matière a un coefficient numérique fixe, appelé masse, tel que les deux accélérations dont je viens de parler sont toujours dans le rapport inverse des masses.

Ainsi, soient M et M′ les deux points, m et j, m' et j', leurs masses et leurs accélérations : j et j' sont dirigées en sens inverse suivant la droite M M′ et l'on a de plus $mj = m'j'$.

Il convient de remarquer que, dans cette expression, j et j' supposent qu'on a choisi l'horloge H ; mais l'existence des coefficients numériques appelés masses ne dépend en rien de ce choix particulier ; le changement de l'horloge n'est en effet pas autre chose qu'un changement de variable dans l'expression $mj = mj'$; or, une nouvelle variable modifierait la forme de cette expression ; mais les constantes m et m' figureraient encore dans l'équation nouvelle où elles seraient simplement engagées d'une autre façon.

La masse est donc une constante indépendante de la mesure du temps.

La masse jouit de cette propriété que, si l'on réunit deux portions de matière, la masse de l'ensemble est la somme des masses des deux portions : c'est la propriété du groupement, comme pour certaines grandeurs géométriques.

La masse étant ainsi définie, la définition de la force s'en déduit immédiatement.

La force a la direction et le sens de l'accélération et est égale au produit de cette accélération par la masse.

Avec l'introduction de cette notion de la force, la loi fondamentale $mj = m'j'$ dont j'ai parlé plus haut s'énonce plus simplement.

Deux points de matière en présence échangent entre eux deux forces égales et contraires dirigées suivant la droite qui les joint.

On voit que la force, comme l'accélération qui en est un des facteurs, est liée au choix de l'horloge H.

En résumé, je suis arrivé, dans cette rapide étude, à définir successivement toutes les grandeurs qu'on rencontre en géométrie et en mécanique, en les rattachant toutes à la série continue du nombre, ce qui était mon but.

§ 4. — *Les repères en mécanique.*

Mais pour ne pas laisser d'obscurité dans l'esprit du lecteur au sujet de cette question des grandeurs dans la mécanique, je dois dire deux mots de la question des repères. Les repères sont, comme on le sait, un ensemble de points de forme quelconque mais fixe, auxquels on rapporte les diverses positions des points en mouvement. On peut toujours réduire les repères à un système de trois axes de coordonnées; le mouvement se définit alors comme suit :

Un point est en mouvement par rapport à ces axes quand ses coordonnées varient. C'est ce qu'on appelle le mouvement relatif, le seul qu'on connaisse et qu'on étudie en mécanique.

Je précise maintenant tout ce que j'ai dit dans les paragraphes 2 et 3 du présent chapitre, en spécifiant que toutes les lois formulées supposent les mouvements rapportés à des axes de coordonnées solidaires du système des étoiles fixes ; en un mot, ce sont ces étoiles fixes qui forment repères.

C'est là un point important, car le changement de repère donne lieu à des vitesses et accélérations partielles qui se composent avec les vitesses et accélérations primitives et en changent ainsi la direction et la valeur. Ainsi, dans la loi suivante :

L'accélération de la terre dans son mouvement autour du soleil passe constamment par le soleil.

On suppose à la fois le temps mesuré sur l'horloge H et les repères pris dans le système des étoiles fixes, une autre horloge ou d'autres repères changeant la direction de cette accélération.

Cette question du mouvement relatif me paraît, à moi, aussi claire que possible; néanmoins, bien des mathématiciens sont encore hantés de cette idée du mouvement absolu ou du moins ont beaucoup de peine à s'en détacher complètement.

L'idée de mouvement est inséparable de l'idée de repère. On dit : un point se meut par rapport à des axes de coordonnées, il a une vitesse, une accélération, etc. ; on fait abstraction de ces axes, il n'y a pas de raisons pour que le mouvement ne continue pas avec sa même vitesse, etc.

Au fond cela n'a aucun sens : voici un corps symétrique ayant une droite et une gauche ; on supprime la gauche, que reste-t-il? La droite, répondra presque tout le monde. En somme, il ne reste qu'un corps dissymétrique dans lequel l'idée de droite et de gauche cesse d'avoir un sens.

Mais, pour bien éclaircir ce point et répondre à une objection qui m'a été faite, je vais examiner un exemple particulier.

Rapportée au système des étoiles fixes comme repères, la terre est animée d'un mouvement de rotation sur elle-même autour d'un axe de direction fixe par rapport aux étoiles, axe qui passe par les pôles de la terre ; enfin celle-ci a la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati au pôle et renflé à l'équateur ; or, la théorie établit que c'est précisément la forme que prend une sphère liquide tournant autour d'un axe, sous la double influence de la pesanteur et de la force centrifuge développée par la rotation. Ainsi, toute molécule de la surface est soumise à ces deux forces partielles, l'une constante, la pesanteur, et l'autre variable du pôle à l'équateur ; il en résulte une forme définitive telle qu'en chaque point de la surface la résultante de ces deux forces partielles est toujours normale à cette surface.

Or, disent les partisans du mouvement absolu, supprimez par la pensée les étoiles fixes qui servent de repères, rien n'est changé dans les conditions du mouvement ; il n'y a aucune raison pour que la terre s'arrête, ni pour qu'elle change de forme en la supposant liquide ; et comme cette forme résulte de la pesanteur et de la force centrifuge, cela implique que cette force centrifuge persiste et par suite aussi la rotation qui en est la cause.

Voilà l'objection ; je vais montrer qu'elle repose sur un sophisme : prenons donc la terre liquide et faisons abstraction des étoiles fixes qui ont servi de repères ; il est parfaitement exact que la terre conserve sa forme d'ellipsoïde aplati aux pôles et renflé à l'équateur ; cela implique évidemment que chaque molécule à la surface continue à être soumise à une force totale normale à cette surface.

Sous ce rapport il n'y a rien de changé ; mais ce qui est capital c'est que la décomposition de cette force normale en deux forces partielles (pesanteur et force centrifuge) n'est nullement néces-

saire ; en réalité, si, faute de ces repères, nous n'avions pas observé ce mouvement de la rotation de la terre, nous aurions pris telle quelle cette force normale sans éprouver le besoin de la décomposer en deux autres ; j'ajoute d'ailleurs que cette décomposition de la force totale est un problème indéterminé et qu'on peut faire cette décomposition d'une infinité de manières ; néanmoins, la force normale étant connue, on peut toujours faire cette décomposition en se donnant des conditions supplémentaires. Or voici en particulier comment cette décomposition peut être faite. Les expériences de Plateau sur la rotation des liquides ont montré qu'une sphère liquide en tournant sur elle-même avec une vitesse convenable prend cette forme ellipsoïdale qu'a la terre.

On peut alors se poser le problème suivant : en faisant passer un axe par les deux pôles de la terre, quelle vitesse de rotation devrait avoir la terre supposée liquide, pour prendre la forme résultant des expériences de Plateau ? Cette vitesse trouvée, un second problème se pose : décomposer la force normale en deux composantes dont l'une soit la force centrifuge résultant de la rotation dont le premier problème a déterminé l'axe et la vitesse.

La décomposition dans ces conditions est bien déterminée et nous ramène aux deux composantes partielles, pesanteur et force centrifuge.

Mais, en somme, en nous posant le problème de déterminer une rotation en rapport avec la forme de la terre et la vitesse de cette rotation, nous ne faisons que rechercher les repères mêmes de cette rotation. Et, en effet, la vitesse de la rotation connue, nous en déduisons l'angle de cette rotation, c'est-à-dire l'angle, variable avec le temps, que fait un méridien de la terre avec une position initiale de ce même méridien ; mais cette position initiale n'est pas autre chose que le système de repères par rapport auquel cette rotation s'effectue ; nous sommes donc ainsi ramené purement et simplement à ces repères que nous avions cru supprimer, car j'ai à peine besoin d'ajouter que les repères ainsi retrouvés ne diffèrent pas du système des étoiles fixes.

Je crois cet exemple suffisamment concluant et considère comme bien acquis qu'au point de vue de la mécanique un mouvement n'a de sens que par rapport à des repères.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
CHAPITRE Ier. — Les Notions de nombre et de grandeur	3
CHAPITRE II. — Les Grandeurs géométriques	9
§ 1er. — Le continu géométrique	9
§ 2. — Définition des grandeurs géométriques	14
§ 3. — Les aires et les volumes	17
CHAPITRE III. — Les Grandeurs en Mécanique	20
§ 1er. — Origine de la notion de durée	20
§ 2. — Définition de la durée	22
§ 3. — Définition de la masse et de la force	26
§ 4. — Les repères en mécanique	28

Nancy, imprimerie Berger-Levrault et Cie.

15304
opt

LIBRAIRIE BERGER-LEVRAULT ET Cie

PARIS, 5, RUE DES BEAUX-ARTS. — 18, RUE DES GLACIS, **NANCY**

DU MÊME AUTEUR

Étude critique sur la Mécanique. Grand in-8°. 1885. (*Épuisé.*)

Étude sur la Sphère, la ligne droite et le plan. Grand in-8°, avec figures. 1888. . . . . **2** fr. **50** c.

Étude de Cinématique à deux et à trois dimensions. Grand in-8°, avec figures. 1890. . . . . **5** fr.

Introduction à la Géométrie des espaces à trois dimensions. Grand in-8°. 1891 . . . . . **2** fr.

La Géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante. Grand in-8°, avec 30 figures. 1895 . . . **2** fr. **50** c.

Nancy, imprimerie Berger-Levrault et Cie.

3 2044 058 218 306

THE BORROWER WILL BE CHARGED
AN O
RETURNED TO THE LIBRARY ON OR
BEFORE THE LAST DATE STAMPED
BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE
NOTICES DOES NOT EXEMPT THE
BORROWER FROM OVERDUE FEES.

CANCELLED
MAY 9 - 1984
7887868

WIDENER
NOV 14 1984
1208599

CANCELLED
NOV 7 - 1985
1409758